

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, 14.02.2026**  
**Clasa a VIII-a**  
**Barem de evaluare**

**SUBIECTUL I** Fie mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x = 2y + 3 \text{ și } \sqrt{4y^2 - 4y + 1} < 3, y \in \mathbb{R}\} \text{ și } B = \{z \in \mathbb{R} | z = 2y - 1 \text{ și } \sqrt{9y^2 + 6y + 1} \leq 4, y \in \mathbb{R}\}$$

- a) Determinați mulțimile  $A$  și  $B$ .  
b) Arătați că suma numerelor întregi din mulțimea  $A \cup B$  este un număr prim.

Soluție și barem

2,5p oficiu

$$\sqrt{4y^2 - 4y + 1} < 3 \Leftrightarrow |2y - 1| < 3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 3,5p$$

$$-3 < 2y - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2y < 4 \Leftrightarrow 1 < 2y + 3 < 7 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$1 < x < 7 \Leftrightarrow A = (1, 7) \dots\dots\dots 2p$$

$$\sqrt{9y^2 + 6y + 1} \leq 4 \Leftrightarrow |3y + 1| \leq 4 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 3,5p$$

$$-4 \leq 3y + 1 \leq 4 \Leftrightarrow -5 \leq 3y \leq 3 \Leftrightarrow \frac{-10}{3} \leq 2y \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-13}{3} \leq 2y - 1 \leq 1 \Leftrightarrow \dots 3p$$

$$\frac{-13}{3} \leq z \leq 1 \Leftrightarrow B = \left[\frac{-13}{3}, 1\right] \dots\dots\dots 2p$$

$$A \cup B = \left[\frac{-13}{3}, 7\right) \dots\dots\dots 3p$$

$$S = (-4) + (-3) + \dots + 5 + 6 = 11 \dots\dots\dots 2,5p$$

**SUBIECTUL II** Fie  $x$  și  $y$  numere reale negative pentru care are loc relația  $4x^2 + 4y^2 - x^2y^2 < 16$ .  
Arătați că  $xy + 2x + 2y + 4 > 0$

Soluție și barem

2,5p oficiu

$$4x^2 + 4y^2 - x^2y^2 < 16 \Leftrightarrow x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 16 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(y^2 - 4) > 0 \dots\dots\dots 4,5p$$

$$\text{Cazul. I. } \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ y^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 4 \\ y^2 > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| > 2 \\ |y| > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \\ y \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \end{cases} \dots\dots\dots 5,5p$$

$$\text{Dar } x \text{ și } y \text{ sunt numere reale negative deci } \begin{cases} x \in (-\infty, -2) \\ y \in (-\infty, -2) \end{cases}, \text{ deci } \begin{cases} x + 2 < 0 \\ y + 2 < 0 \end{cases},$$

$$\text{de unde obținem } (x + 2)(y + 2) > 0 \Rightarrow xy + 2x + 2y + 4 > 0. \dots\dots\dots 3p$$

Cazul. II.  $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ y^2 - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 4 \\ y^2 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| < 2 \\ |y| < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-2, 2) \\ y \in (-2, 2) \end{cases} \dots\dots\dots 5,5p$

Dar  $x$  și  $y$  sunt numere reale negative deci  $\begin{cases} x \in (-2, 0) \\ y \in (-2, 0) \end{cases}$ , deci  $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ y + 2 > 0 \end{cases}$ ,

de unde obținem  $(x + 2)(y + 2) > 0 \Rightarrow xy + 2x + 2y + 4 > 0$ .  $\dots\dots\dots 4p$

**SUBIECTUL III** Fie  $M$  și  $N$  mijloacele muchiilor  $AB$  respectiv  $CC'$  ale cubului  $ABCD A' B' C' D'$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $DB \cap CM = \{P\}$ ,  $NB \cap CB' = \{Q\}$ .

- Arătați că dreapta  $PQ$  este paralelă cu planul  $(AA'C')$ .
- Dacă  $PQ = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ , calculați aria patrulaterului  $PQNO$ .

**Soluție și barem**

**2,5p oficiu**

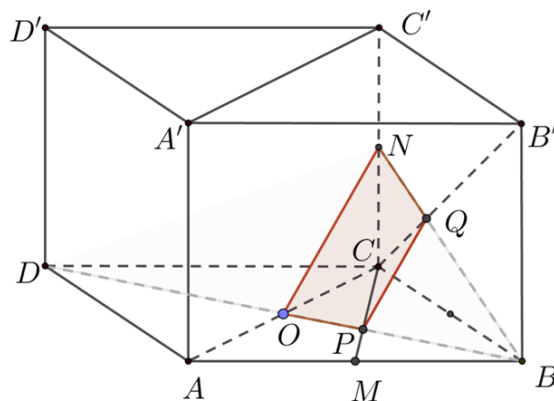
a) Punctul  $P$  este centrul de greutate al triunghiului

$ABC$ , deci  $\frac{BP}{PO} = 2$ .  $\dots\dots\dots 4,5p$

Punctul  $Q$  este centrul de greutate al triunghiului

$BCC'$ , deci  $\frac{BQ}{QN} = 2$ .  $\dots\dots\dots 4,5p$

Din  $\frac{BP}{PO} = \frac{BQ}{QN} = 2$ , din reciproca teoremei lui



Thales obținem că  $PQ \parallel AC'$ , dar  $AC' \subset (AA'C')$ , deci  $PQ$  este paralelă cu planul.....5p

b)  $CC' \perp (ABC)$ ,  $OB \subset (ABC) \Rightarrow BO \perp CC'$ , (1).

$ABCD$  pătrat, deci  $BO \perp AC$  (2)

Din (1) și (2) respective din  $ON \subset (ACC')$ , obținem  $PO \perp ON$ .

$PQ \parallel ON$  și  $PO \perp ON$  obținem că patrulaterul  $PQNO$  este un trapez dreptunghic. ....4,5p

Dacă  $PQ = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ , folosind faptul că  $PQ \parallel ON \Rightarrow \triangle BQP \sim \triangle BNO \Rightarrow \frac{QP}{NO} = \frac{2}{3}$ . Dacă

$PQ = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ , atunci  $ON = 3\sqrt{3} \text{ cm}$ .

Dacă latura cubului notăm cu  $a$ , în triunghiul  $OCN$  folosind teorema lui Pitagora obținem

$$OC^2 + CN^2 = ON^2, \text{ adică } \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 27, \text{ de unde } a = 6.$$

$$OP = \frac{1}{3}OB \Rightarrow OP = \sqrt{2}. \text{ Deci } S_{PQNO} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \text{ cm}^2 \dots\dots\dots 4p$$

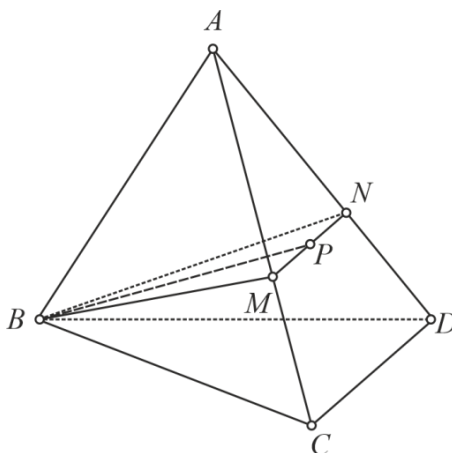
**SUBIECTUL IV**

Fie  $ABCD$  un tetraedru regulat și  $M \in (AC)$ .

- a) Dacă  $M$  este mijlocul segmentului  $(AC)$ , calculați  $\cos(\angle(BM, CD))$ .  
 b) Arătați că, pentru orice  $M \in (AC)$ , raportul  $\frac{\cos(\angle(BM, CD))}{\sin(\angle ABM)}$  are aceeași valoare.

Gazeta matematică

Soluție și barem



2,5p oficiu

Notăm lungimea laturii tetraedrului cu  $a$ . Construim  $MN \parallel CD$ ,  $N \in (AD)$  și fie  $P$  mijlocul segmentului  $MN$ .

$$MN \parallel CD \Rightarrow \angle(BM, CD) = \angle(BM, MN) = \angle BMN \dots\dots\dots 4,5p$$

$$MN \text{ linie mijlocie în triunghiul } ACD \Rightarrow MN = \frac{a}{2} \dots\dots\dots 3,5p$$

$$BM = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ și } MP = \frac{a}{4} \dots\dots\dots 3,5p$$

$$\triangle BMP (\angle P = 90^\circ) \Rightarrow \cos(\angle BMN) = \frac{MP}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{6} \dots\dots\dots 2p$$

$$b) \cos(\angle(BM, CD)) = \cos(\angle BMN) = \frac{MP}{BM} = \frac{\frac{1}{2}MN}{BM} = \frac{MN}{2BM} = \frac{AM}{2BM}, \triangle AMN - \text{echilateral} \dots\dots 3p$$

$$A_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot \sin(\angle ABM) \Rightarrow \sin(\angle ABM) = \frac{AM \cdot \sin 60^\circ}{BM} \dots\dots\dots 3p$$

$$\frac{\cos(\angle(BM, CD))}{\sin(\angle ABM)} = \frac{\frac{AM}{2BM}}{\frac{AM \cdot \sin 60^\circ}{BM}} = \frac{1}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 3p$$

**Notă:** Orice altă rezolvare corectă a unei probleme, se evaluează cu maxim de puncte (22,5p)

Probleme propuse de prof. Matefi Istvan, prof. Gînta Vasile, prof. Dărăban Gheorghe